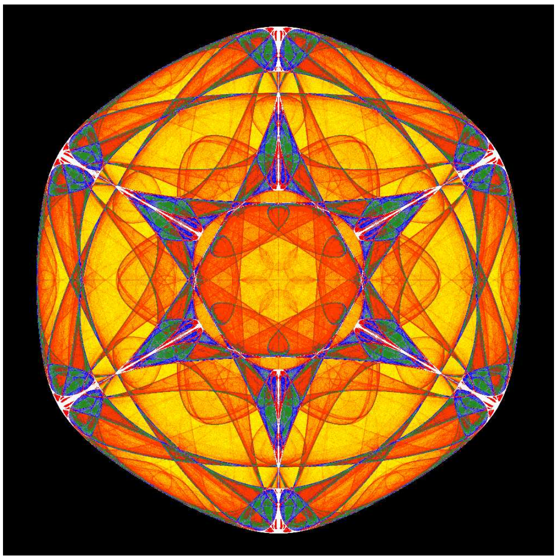
Eine Sammlung von Aufgaben
zum Grundwissen Mathematik
für die Jahrgangsstufen 5 mit 10



Ludwigsgymnasium Straubing
Fachschaft Mathematik
5. Dezember 2015

Diese Sammlung fragt wesentliche Lernziele des Unterrichts im Fach Mathematik für die Jahrgangsstufen 5 mit 10 ab. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben variiert.

Die zum Beispiel für die Jahrgangsstufen 5 mit 7 zusammengestellten Aufgaben decken zwar (noch) nicht alle grundlegenden Lerninhalte der Jahrgangsstufen 5 mit 7 ab, die Fähigkeit, sie zu lösen, ist aber eine wesentliche Voraussetzung, um dem Unterricht in der Jahrgangsstufe 8 ohne Probleme folgen zu können.

Die Aufgaben sollten deshalb von den Schülern jederzeit und umfassend gelöst werden können. Viele Aufgaben sind vom Kultusministerium verantworteten Leistungserhebungen entnommen. Fragen zu dieser Sammlung können an den Mathematiklehrer gerichtet werden.

Reich (StD)

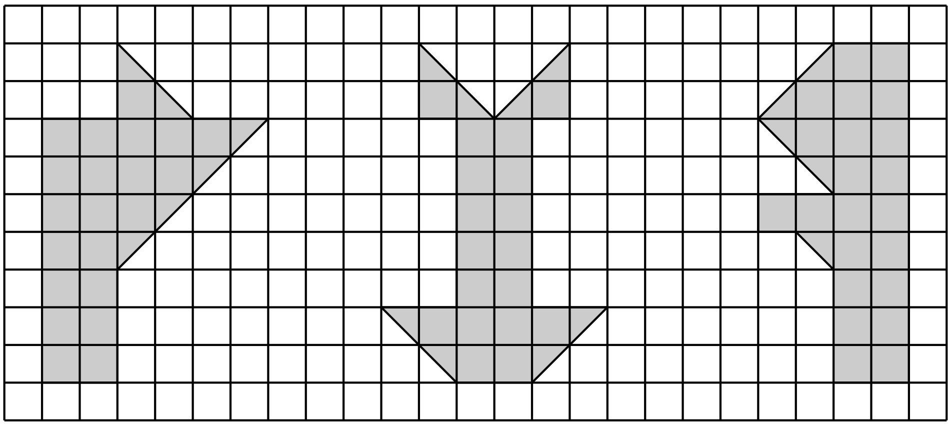
Inhaltsverzeichnis

1 Für die Jahrgangsstufe 5

1. Gegeben sind die drei (graugetönten) Figuren A, B und C (vergleiche Abbildung).

   a) Gib an, welche dieser drei Figuren den größten und welche den kleinsten Flächeninhalt hat. Erläutere deine Überlegungen.

   b) Im Vergleich zu den beiden anderen Figuren hat Figur B eine besondere Eigenschaft. Nenne diese besondere Eigenschaft.



Figur A Figur B Figur C

2. Sowohl Anna als auch Bea haben ein Quadrat gezeichnet. Bei dem Quadrat, das Anna gezeichnet hat, ist jede Seite genau doppelt so lang wie bei dem, das Bea gezeichnet hat. Kreuze *alle* richtigen Aussagen an. Bei dem Quadrat von Anna …

   ☐ … ist der Umfang doppelt so groß wie bei dem von Bea.

   ☐ … ist der Umfang viermal so groß wie bei dem von Bea.

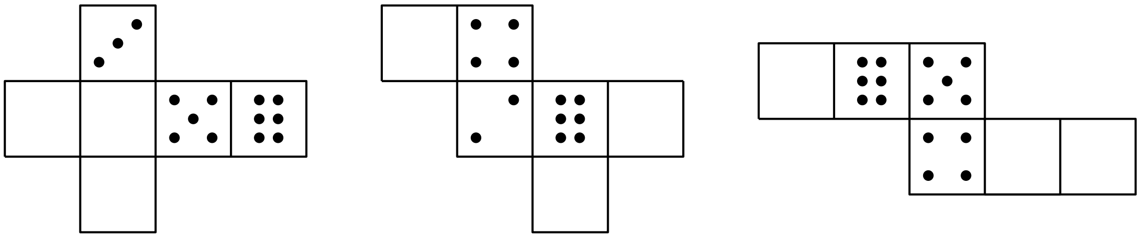
   ☐ … ist der Flächeninhalt doppelt so groß wie bei dem von Bea.

   ☐ … ist der Flächeninhalt viermal so groß wie bei dem von Bea.

3. a) Formuliere das Assoziativgesetz der Multiplikation (in allgemeiner Form). Wie müßte das Assoziativgesetz der Division lauten? Zeige (anhand eines Gegenbeispiels), dass es *kein* Assoziativgesetz der Division gibt.

   b) Formuliere das Kommutativgesetz der Addition (in allgemeiner Form). Wie müßte das Kommutativgesetz der Subtraktion lauten? Zeige (anhand eines Gegenbeispiels), dass es *kein* Kommutativgesetz der Subtraktion gibt.

4. Bei einem Spielwürfel ergeben die Augenzahlen auf gegenüberliegenden Seiten zusammen immer sieben. Ergänze bei folgenden Netzen von Spielwürfeln jeweils die Eins.



5. a) Erläutere, was man unter einer Primzahl versteht. Schreibe alle Primzahlen auf, die kleiner als 80 sind.
   b) Zerlege 1200 in Primfaktoren. Verwende die Potenzschreibweise.
   c) Es gilt $26071 = 29^2 \cdot 31$. Bestimme mit Hilfe dieser Primfaktorzerlegung die Anzahl der (positiven) Teiler von 26071.

6. a) Mara behauptet, dass sich der Wert eines Produkts verfünffacht, wenn der erste Faktor verdoppelt und der zweite Faktor verdreifacht wird. Nimm (begründet) Stellung zu dieser Behauptung, stelle gegebenenfalls richtig.
   b) Tina behauptet, dass sich der Wert eines Quotienten verdoppelt, wenn der Dividend verzehnfacht und der Divisor verfünffacht wird. Nimm (begründet) Stellung zu dieser Behauptung, stelle gegebenenfalls richtig.

7. Lisa wirft dreimal einen Spielwürfel mit den Augenzahlen 1 bis 6. In der Reihenfolge der Würfe notiert sie nacheinander die drei erzielten Augenzahlen als Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffer einer dreistelligen Zahl.

   a) Berechne, wie viele Möglichkeiten es für die dreistellige Zahl gibt.
   b) Bestimme, wie viele Möglichkeiten es für die dreistellige Zahl gibt, wenn diese mindestens zweimal die Ziffer 6 enthält. Erläutere deinen Gedankengang.

8. a) Begründe durch Anfertigen einer beschrifteten Skizze, dass $1\,\mathrm{m}^2 = 100\,\mathrm{dm}^2$ gilt.

b) Ein sehr genau vermessenes rechteckiges Grundstück der Länge 57 m 80 cm hat einen Flächeninhalt von $1913\,\text{m}^2\ 18\,\text{dm}^2$. Bestimme die Breite dieses Grundstücks.

9. Gegeben ist der Term 3,8 kg : 200 g. Bestimme den Wert des Terms und formuliere eine Sachaufgabe, die mit Hilfe des Terms gelöst werden kann.

10. Bei einer Spielshow treten zwei Kontrahenten in einem Wettkampf, der aus zehn Spielen besteht, gegeneinander an. Jedes Spiel hat einen Sieger, der beim ersten Spiel einen Punkt, beim zweiten Spiel zwei Punkte usw. erhält, und einen Verlierer, der jeweils keinen Punkt erhält. Ist es möglich, dass am Ende des Wettkampfs beide Kontrahenten gleich viele Punkte erhalten haben? Begründe deine Antwort.

11. Ein Fernsehgerät kostet 1189 €. Wenn es in Raten bezahlt wird, müssen 300 € anbezahlt werden und der Rest muss in zwölf gleichen Monatsraten abbezahlt werden. Bei Ratenzahlung ist das Fernsehgerät außerdem um 23 € teurer. Bestimme mit Hilfe eines Gesamtterms, wie hoch eine Monatsrate ist.

12. Ein 900 m langer Zug fährt mit 72 km/h über eine 250 m lange Brücke. Bestimme, wie lange es von dem Zeitpunkt, an dem die Spitze des Zuges auf die Brücke kommt, bis zu dem Zeitpunkt, an dem das Ende des Zuges die Brücke verlässt, dauert.

13. Gegeben ist der Term

$$\Big(420 : (36-43)\Big) + \Big((-4-7)\cdot(-9)\Big).$$

a) Berechne den Wert des Terms.

b) Nina hat den Term gegliedert. Dabei hat sie einige Lücken (…) gelassen. Fülle diese Lücken grammatikalisch korrekt und mathematisch sinnvoll aus.

Der Term ist eine …. Der erste … ist ein Quotient, dessen … die Zahl 420 und dessen … die Differenz der Zahlen 36 und … ist. Der zweite Summand ist ein …, dessen erster … die … der Zahlen −4 und 7 und dessen … Faktor die Zahl … ist.

14. Gegeben ist der Term

$$\Big((-2)^4 - \big(3-(-4)\big)\Big) : \Big(\big(-21+(-3)\big) : 2^3\Big).$$

a) Berechne den Wert des Terms.

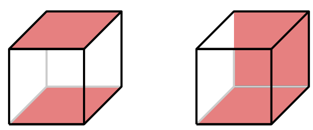
b) Martha hat den Term gegliedert. Dabei hat sie einige Lücken (...) gelassen. Fülle diese Lücken grammatikalisch korrekt und mathematisch sinnvoll aus.

Der Term ist ein .... Der Dividend ist eine ..., deren Minuend die Potenz mit Basis -2 und ... 4 und deren Subtrahend die Differenz der Zahlen ... und -4 ist. Der ... ist ein Quotient, dessen Dividend die ... der Zahlen -21 und -3 und dessen Divisor die ... mit ... 2 und ... 3 ist.

15. Pia startet um 13:25 Uhr zu einem Marathonlauf, für den sie 24 420 Sekunden benötigt. Bestimme, wann genau Pia durch das Ziel läuft.

16. Ein $4\,\mathrm{ha}\,70\,\mathrm{a}\,4\,\mathrm{m}^2$ großes Grundstück soll so in zwei Teilgrundstücke aufgeteilt werden, dass ein Teilgrundstück doppelt so groß ist wie das andere. Bestimme, wie groß das größere der beiden Teilgrundstücke wird.

17. Tekin bastelt aus weißem Karton gleich große Würfel. Tabea schaut eine Weile zu und fragt dann, ob sie die Würfel färben darf. Tekin erlaubt dies, aber nur unter der Bedingung, dass Tabea entweder eine Seitenfläche weiß belässt oder ganz rot färbt. Dann habe ich ja nur sieben Möglichkeiten jammert Tabea. „Entweder alle Seitenflächen sind weiß oder fünf oder vier oder drei oder zwei oder eine oder keine.“ Tekin antwortet: „Das stimmt auf keinen Fall, denn es gibt zwei Möglichkeiten, genau zwei Seitenflächen rot zu färben.“



Untersuche, wie viele Möglichkeiten es tatsächlich gibt. Zeichne für jede Möglichkeit ein Netz an.

18. Berechne:

$$(-2-11)^2-(-4+20)^2-(-5-(-2)\cdot(-7))^2-(5\cdot 6-8)^2-(-2)\cdot 5^4$$

2 Für die Jahrgangsstufe 6

1. a) Alwin behauptet, dass der Bruch $\frac{12}{23}$ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Nimm (begründet) Stellung zu dieser Behauptung.

   b) Baldwin soll die Zahl bestimmen, die auf der Zahlengeraden genau in der Mitte zwischen $-\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$ liegt. Nach einer (kurzen) Rechnung erhält er $-\frac{7}{40}$ als die gesuchte Zahl. Beschreibe, wie Baldwin dabei vorgegangen sein könnte und überprüfe, ob die von Baldwin berechnete Zahl die richtige ist.

2. Cornelius behauptet, dass der Wert des Terms

$$\frac{\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{10}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)}{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{12}{15}\right) - \frac{6}{4} \cdot \left(-\frac{5}{10}\right)}$$

   eine negative ganze Zahl ist. Überprüfe dies.

3. Decimus denkt sich eine Zahl. Wenn er diese Zahl um 88% vermindert, so erhält er die Zahl 36. Bestimme, welche Zahl sich Decimus gedacht hat.

4. Mit der Mehrwertsteuer von 19% kostet eine Hose 119 €. Eligius behauptet, dass diese Hose mit einer Mehrwertsteuer von 20% 120,19 € kosten würde, Fabian hingegen behauptet, dass sie 120 € kosten würde. Entscheide, wer von beiden recht hat und begründe deine Entscheidung.

5. In dem Parallelogramm ABCD gilt $\overline{\text{AB}} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{\text{BC}} = 5\,\text{cm}$. Die Höhe auf die Seite [AB] ist 3 cm lang.

   a) Zeichne das Parallelogramm an. Erläutere deine Vorgehensweise.

   b) Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms und (exakt) den Abstand der Seiten [AD] und [BC].

6. a) Erläutere, was man unter einer Raute versteht.

   b) Den Flächeninhalt einer Raute kann man mit der Formel $A = \frac{e \cdot f}{2}$ berechnen. Erläutere anhand einer Skizze, was dabei e und f bedeuten.

   c) Zeichne eine Raute ABCD mit Flächeninhalt $20\,\text{cm}^2$ an, bei der die Seite [AB] außerdem länger als 10 cm ist. Erläutere deine Vorgehensweise.

7. a) Erläutere, was man unter einem Trapez versteht.

b) Den Flächeninhalt eines Trapezes ABCD kann man mit der Formel $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ berechnen. Erläutere anhand einer Skizze, was dabei a, c und h bedeuten.

c) Im Trapez ABCD mit AB $\parallel$ CD ist a dreimal so lang wie c, die Höhe h ist doppelt so lang wie c, nämlich 4 cm. Bestimme den Flächeninhalt des Trapezes.

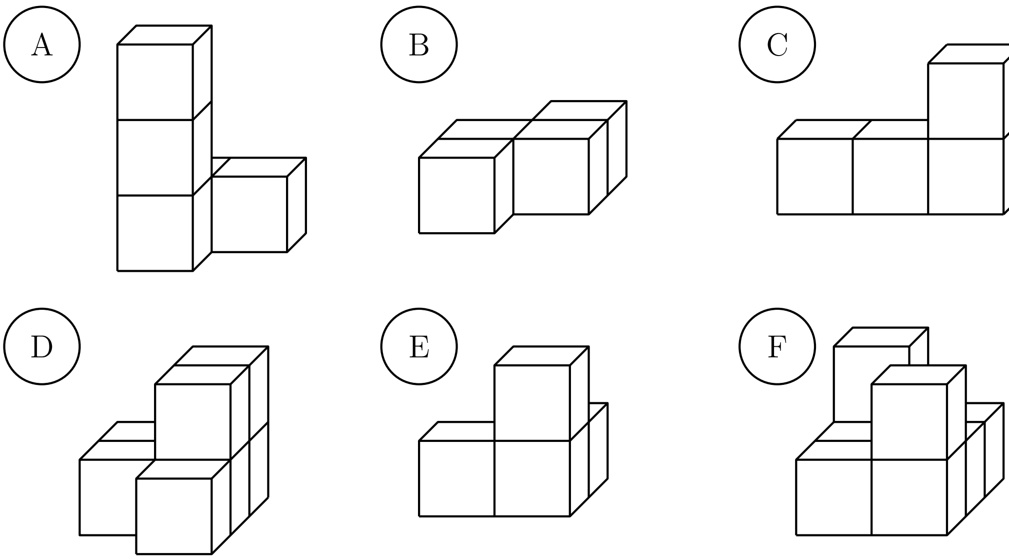
8. Trage die Punkte A$(-3|2)$, B$(2|1)$ und C$(4|4)$ in ein Koordinatensystem ein und bestimme dann exakt den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

9. Gliedere den Term

$$\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) : 4$$

und berechne seinen Wert.

10. Gangolf hat aus Würfel der Kantenlänge 12 cm sechs Würfelgebäude zusammengesetzt, vergleiche Abbildung.



a) Zwei der sechs Würfelgebäude ergeben zusammen einen Quader. Gib diese zwei Würfelgebäude an.

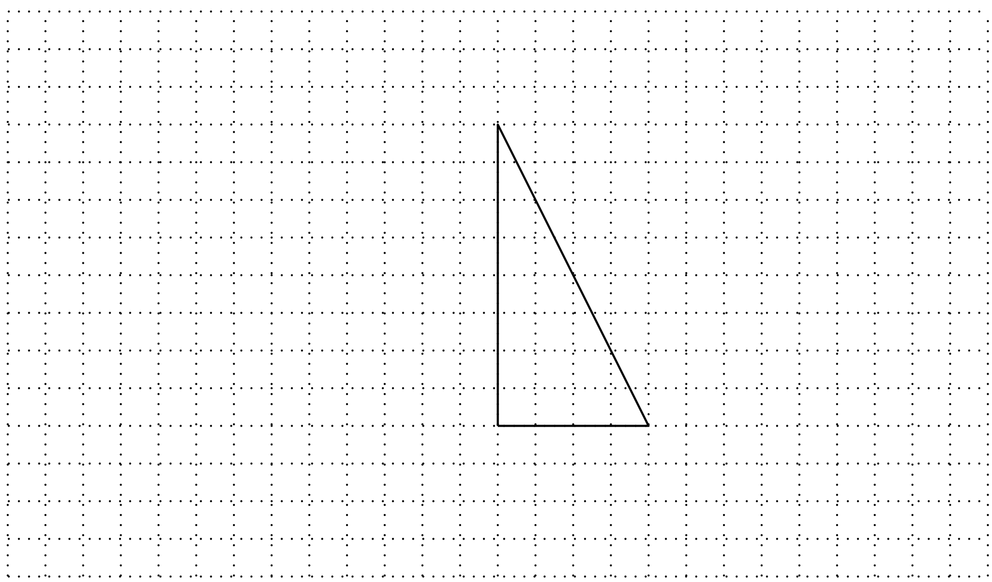
b) Zeige, dass Gangolf für die sechs Würfelgebäude insgesamt 32 Würfel verwendet hat und bestimme das gesamte Volumen aller sechs Würfelgebäude (in cm^3 und in dm^3).

c) Wähle eines der sechs Würfelgebäude aus und bestimme dessen Oberflächeninhalt (in cm^2 und in dm^2).

11. Ein Schwimmbecken ist 2 m tief, 50 m lang und 14 m breit. Im Schwimmbecken befinden sich 100 Personen. Pro Person werden durchschnittlich 70 Liter Wasser verdrängt. Berechne, um wie viele Zentimeter der Wasserspiegel sinkt, wenn alle Personen das Becken verlassen und kein Wasser nachgefüllt wird.

12. In einem Zeitungsartikel ist zu lesen: „Beim gestrigen Unwetter wurde eine Niederschlagshöhe von 15 mm erreicht.“ Ermittle, wie viele Liter Wasser bei diesem Unwetter auf einen Quadratmeter einer horizontalen Fläche fielen, indem du das Volumen eines Quaders mit einer Grundfläche von einem Quadratmeter und einer Höhe von 15 mm berechnest.

13. Ergänze das im Gitternetz abgebildete Dreieck so zu einer achsensymmetrischen Figur, dass der Inhalt des Dreiecks $\frac{2}{5}$ des Inhalts der Gesamtfläche der Figur beträgt. Erläutere deinen Gedankengang.



14. Ein Internetportal bietet Zusatzprogramme für Smartphones an. Bei jedem Verkauf eines solchen Programms behält der Betreiber des Portals 30% des Verkaufspreises; den Rest erhält der Entwickler des Programms. Ein Entwickler eines Programms möchte bei jedem Verkauf 1,40 € erhalten. Ermittle den festzulegenden Verkaufspreis.

15. Zeichne die Punkte $A(-2\,|\,-1)$, $B(5\,|\,-1)$, $C(3{,}5\,|\,3{,}5)$ und $D(-1{,}5\,|\,2)$ in ein Koordinatensystem ein und verbinde sie zu dem Viereck ABCD. Berechne dann den genauen Flächeninhalt des Vierecks ABCD, erläutere deine Vorgehensweise. Verwende 1 cm als Längeneinheit.

16. Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,1)$, $B(1\,|\,2)$ und $C(1\,|\,4)$. Durch Hinzunahme eines vierten Punktes können Parallelogramme gebildet werden.

    a) Harro ergänzt die drei gegebenen Punkte zu einem Parallelogramm ABCD. Gib die Koordinaten von D an.

    b) Helfgott hingegen ergänzt die drei gegebenen Punkte zu einem Parallelogramm ABEC. Gib die Koordinaten von E an.

    c) Hieronymus schließlich ergänzt die drei gegebenen Punkte zu einem Parallelogramm AFBC. Gib die Koordinaten von F an.

3 Für die Jahrgangsstufe 7

1. Bestimme die Lösung der Gleichung: $1{,}5\,x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,x - 3{,}5$

2. Ein Quader ist viermal so breit wie hoch und dreimal so lang wie breit.

   a) Bestimme den Oberflächeninhalt des Quaders, wenn er 12 cm breit ist.

   b) Bestimme einen (nur von der Breite abhängigen) Term, mit dem sich der Oberflächeninhalt des Quaders allgemein berechnen lässt und vereinfache diesen Term möglichst weit.

3. a) Bestimme die Lösung der Gleichung

   (i) $5 + 0{,}3(x - 10) = 0{,}4x$

   (ii) $6x^2 - 2x = 0$

   über der Grundmenge $\mathbb{Q}$.

   b) Gegeben ist der Term

   $$a(x) = x \cdot (7 + x) \cdot (6 - x) \cdot (2 + x)$$

   mit $x \in \mathbb{Q}$. Gib alle $x \in \mathbb{Q}$ an, für die $a(x) = 0$ gilt.

4. Hadrian ist um 25% größer als Ignaz. Bestimme, um wie viel Prozent Ignaz kleiner als Hadrian ist.

5. Ein Geschäft öffnet um 9.00 Uhr. Um 12.00 Uhr wird der Preis einer Hose um 20% erhöht. Um 14.00 Uhr wird der Preis dieser Hose noch einmal erhöht, dieses Mal um 30%. Vergleiche den Preis der Hose nach 14.00 Uhr mit dem um 9.00 Uhr. Gib die Veränderung in Prozent an.

6. Die längere Seite eines Rechtecks wird um 20% verkürzt, die kürzere um 20% verlängert. Es entsteht wieder ein Rechteck. Untersuche, ob sich der Flächeninhalt geändert hat. Gib gegebenenfalls an, wie und um wie viel Prozent er sich geändert hat.

7. Ein Mischgetränk enthält $8\,\ell$ Apfelsaft, die restlichen 20% sind Kirschsaft. Bestimme, wie viele Liter Kirschsaft dazu gegossen werden müssen, damit der Kirschsaftanteil auf 60% steigt.

8. a) Erläutere (anhand einer Skizze) was die Formel

   $$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

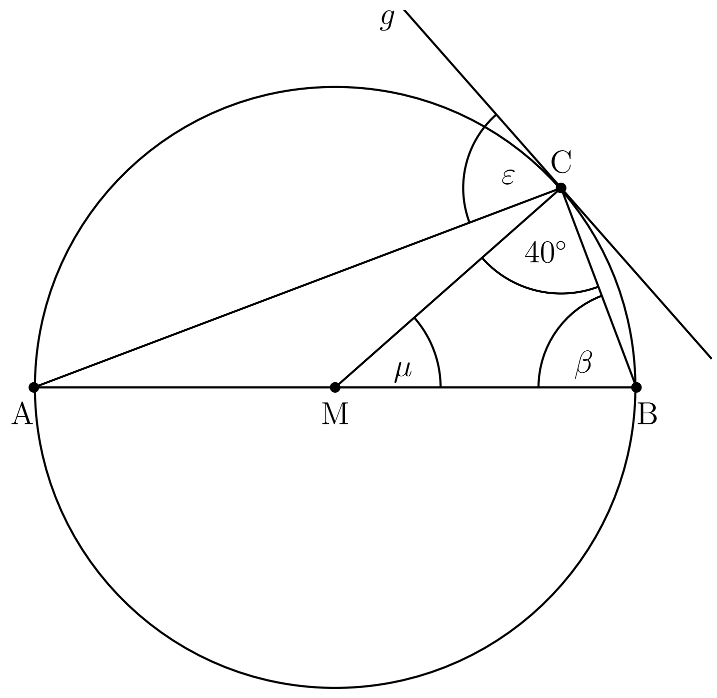
für ein Trapez bedeutet.
b) In einem Trapez ist eine Grundseite fünfmal so lang wie die andere. Die Höhe ist doppelt so lang wie die kürzere der beiden Grundseiten. Fertige eine aussagekräftige Skizze an und bestimme dann die Länge der kürzeren Grundseite so, dass der Flächeninhalt des Trapezes 54 beträgt.

9. In einem Trapez verhalten sich die Längen der parallelen Seiten wie 3:1. Die Höhe ist doppelt so lang wie die kürzere der beiden parallelen Seiten. Der Flächeninhalt beträgt 676 cm^2. Bestimme, wie lang die Höhe ist.

10. a) Jakob hat richtig ausgeklammert. Ergänze seine Rechnung sinnvoll.
$$8c^2d^3 - \ldots = 4cd^3 \cdot \left(\ldots - 3d^2\right)$$
b) Vereinfache möglichst weit.
$$2x\left(3-(5-1)a\right) - a\left(5 - 2^3(-3x+4x)\right)$$
c) Gegeben ist der von a und b abhängige Term
$$T(a;b) = \frac{a-2b}{0{,}5b-3a}$$
Bestimme den Wert des Terms für $a = -1$ und $b = \frac{1}{3}$.

11. Ein Quadrat mit der Seitenlänge $x\,\text{cm}$ wird mit einem Rechteck verglichen, dessen Länge um $2\,\text{cm}$ größer und dessen Breite um $3\,\text{cm}$ kleiner ist als die Seitenlänge des Quadrats. Berechne den Wert von x, für den der Flächeninhalt des Rechtecks um $15\,\text{cm}^2$ kleiner ist als der des Quadrats.

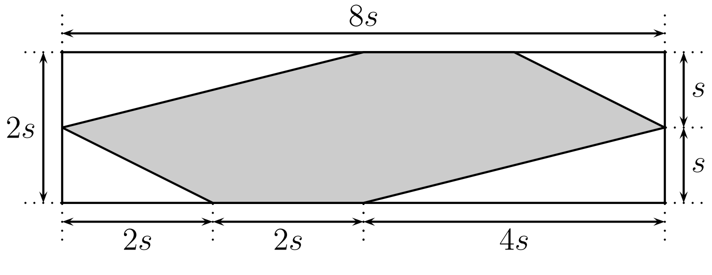
12. Die nicht maßstabsgetreue Abbildung zeigt das Dreieck ABC, dessen Eckpunkte auf der Kreislinie um den Punkt M liegen; die Strecke [AB] verläuft durch M. Die Gerade g ist eine Tangente an den Kreis und berührt diesen im Punkt C.



a) Gib die Größe des Winkels β und des Winkels μ an. Erläutere deinen Gedankengang.

b) Kilian hat herausgefunden, dass $\varepsilon = 40°$ gilt. Ergänze sinnvoll, was er einem Mitschüler dazu erklären könnte: „Das Dreieck ABC hat bei C einen rechten Winkel, weil .... Der Winkel ACM ist also 50° groß. Die Winkel ACM und ε müssen zusammen 90° groß sein, weil .... Also ist $\varepsilon = 40°$."

13. In der Abbildung ist eine punktsymmetrische Figur grau getönt.



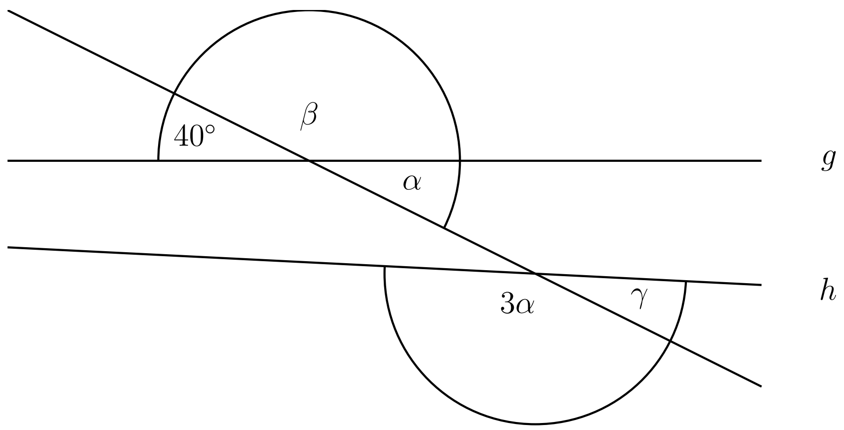
a) Zeige, dass die grau getönte Figur den Flächeninhalt $10s^2$ hat.

b) Gib an, wie groß s sein muss, damit der Flächeninhalt der grau getönten Figur $160\,\text{cm}^2$ beträgt; verwende den in a) angegebenen Term.

14. Entscheide für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

	wahr	falsch
Alle Dreiecke, die in den Längen zweier Seiten und der Größe des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen, sind kongruent.	☐	☐
Alle Dreiecke, die in den Größen ihrer drei Winkel übereinstimmen, sind kongruent.	☐	☐
Alle Dreiecke, die in der Länge einer Seite und in der Länge der zugehörigen Höhe und in der Größe eines dieser Seite anliegenden Winkels übereinstimmen, sind kongruent.	☐	☐
Alle Dreiecke, die in der Länge einer Seite und in der Länge der zugehörigen Höhe und im Flächeninhalt übereinstimmen, sind kongruent.	☐	☐
Alle gleichschenkligen Dreiecke, die in der Größe eines Winkels übereinstimmen, sind kongruent.	☐	☐
Alle gleichseitigen Dreiecke, die in der Länge ihres Umfangs übereinstimmen, sind kongruent.	☐	☐

15. Berechne alle gekennzeichneten Winkel (mit Begründung).



Entscheide, ob die Geraden g und h parallel sind. Begründe deine Entscheidung.

16. Laurentius schreibt eine Folge von Gleichungen auf:

    (1) $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}$ (2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 3}$ (3) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3\cdot 4}$ ...

    Stelle unter Verwendung einer Variablen n eine möglichst einfache Gleichung auf, die für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ die angegebenen Gleichungen (1), (2) bzw. (3) liefert. Untersuche, ob die von dir aufgestellte Gleichung für jede beliebige natürliche Zahl n ($n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$) richtig ist.

17. Untersuche, wie viele nicht-kongruente gleichschenklige Dreiecke mit einem 100°-Winkel es gibt.

18. Bei einem Rechteck wird jede der beiden längeren Seiten (jeweils) um 20% vergrößert und jede der beiden kürzeren Seiten (jeweils) verkürzt. Das dabei entstehende neue Rechteck hat einen um 37,6% kleineren Flächeninhalt als das ursprüngliche. Bestimme, um wie viel Prozent die beiden kürzeren Seiten (jeweils) verkürzt worden sind.

19. Xaver tankt immer für 65 €. Bestimme, um wie viel Prozent er weniger (mehr) Benzin erhält, wenn der Benzinpreis um 20% gestiegen (gefallen) ist.

4 Für die Jahrgangsstufe 8

1. Ergänze jede der folgenden Aussagen zum Rechnen mit Potenzen mathematisch sinnvoll und grammatikalisch korrekt.

   a) Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die ... beibehält und die Exponenten ....

   b) Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis ... und die Exponenten ....

   c) Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die ... dividiert und den ... beibehält.

2. Vereinfache jeden der folgenden Terme möglichst weit. Schreibe den vereinfachten Term jeweils ohne Verwendung eines Bruchstrichs an.

   a) $8^{4r+1} - 6 \cdot 4096^r \quad \text{mit } r \in \mathbb{Z}.$

   b) $\dfrac{a^4 : (a^{-5})^3}{(a^{-6})^{-7} \cdot a^{-2}} \quad \text{mit } a > 0.$

   c) $\dfrac{a^{31} : b^{-12}}{b^5 \cdot a^{-4}} : \dfrac{b^{-11}}{a^{15}} \quad \text{mit } a > 0 \text{ und } b > 0.$

3. Die Punkte $A(4\,|-1)$ und $B(-2\,|-5)$ liegen auf der Geraden g. Bestimme eine Gleichung für g.

4. Zeichne den Graphen der Funktion $f : x \mapsto 2x - 3$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}$. Ergänze folgende Beschreibung des Graphen: „Der Graph ist eine ... mit der ... und dem ....

5. Bestimme (exakt) die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden $g : y = 2x - 1$ und $h : y = 0{,}5x - 4$.

6. p ist die Parallele zu $g : y = 3x - 4$ durch $A(2\,|\,3)$. Beschreibe, wie du vorgehst, um eine Gleichung für p zu bestimmen. Gib eine Gleichung für p an.

7. Vom Punkt $B(2\,|\,5)$ aus wird das Lot ℓ auf die Gerade $g : y = -2x - 3$ gefällt. Zeichne g und ℓ in ein Koordinatensystem ein. Das Produkt der Steigungen von g und ℓ hat einen (einfachen) Wert. Gib diesen Wert an und bestimme dann eine Gleichung für ℓ.

8. Bestimme eine Gleichung der Geraden durch die Punkte $(2\,|\,7)$ und $(-6\,|\,9)$. Untersuche dann (rechnerisch), ob der Punkt $(794\,|-190)$ auf, oberhalb oder unterhalb der Geraden liegt.

9. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{2x+3} + 2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q} \setminus \{-1{,}5\}$.

   a) Bestimme (rechnerisch) die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

   b) Trage den Graphen von f in ein Koordinatensystem ein.

   c) Ergänze folgende Beschreibung des Graphen von f grammatikalisch richtig und mathematisch sinnvoll.
   „Der Graph ist eine ..., bestehend aus zwei so genannten .... Der Graph hat die senkrechte Asymptote ... und die ... Asymptote .... Im Bereich ... verläuft der Graph oberhalb der ..., im Bereich $x < -1{,}5$ verläuft der Graph .... Der Graph ist ... zu $(-1{,}5\,|\,2)$."

10. f ist eine gebrochen-rationale Funktion, deren Graph genau zwei Asymptoten, nämlich die Geraden $x = -4$ und $y = 1$ besitzt. Gib eine (mögliche) Gleichung des Funktionsterms $f(x)$ und den Definitionsbereich von f an. Erläutere, warum es viele mögliche Funktionsterme gibt.

11. Der Graph der Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x-2} + 1$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ wird um 2 längs der x-Achse und um -4 längs der y-Achse verschoben. Es entsteht der Graph der Funktion g. Gib $g(x)$ an. Erläutere deinen Gedankengang.

12. Magnus kauft 3 Tomaten und 4 Bananen. Er zahlt 1,00 €. Peter kauft (im gleichen Geschäft) 5 Tomaten und 2 Bananen. Er zahlt 0,92 €. Bestimme, wie viel eine Tomate, wie viel eine Banane kostet.

13. Ein Laplace-Würfel, der mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet ist, wird zweimal nacheinander geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man die Augensumme 10 erhält.

14. Auf einem Spielfeld, das 100 m lang und 75 m breit ist, findet ein Fußballspiel statt. Ein Spieler passt den Ball zu einem Mitspieler; dabei ist der Ball zwei Sekunden unterwegs. Schätze den Anteil der Spielfeldfläche ab, den die zehn Feldspieler der gegnerischen Mannschaft in dieser Zeit höchstens abdecken können. Gehe dazu davon aus, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit der Spieler, während der Ball unterwegs ist, 5 m/s beträgt. Erläutere dein Vorgehen.

15. Bestimme die Lösung der Gleichung $\frac{1}{4x-5} - \frac{1}{6x} = 0$ über der Grundmenge $\mathbb{Q} \setminus \{0; 1{,}25\}$.

16. Bestimme die Lösungen der Gleichung $x - 3 = \frac{4-3x}{x}$ über der Grundmenge $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

17. Gegeben ist der Term $T(a; b) = \frac{a+b}{a-b}$.

    a) Berechne den Wert des Terms für $(a; b) = (-2; 3)$.

    b) Gib ein Zahlenpaar $(a; b)$ an, das nicht in den Term eingesetzt werden darf.

    c) Gib ein Zahlenpaar $(a; b)$ an, für das der Term den Wert 0 ergibt.

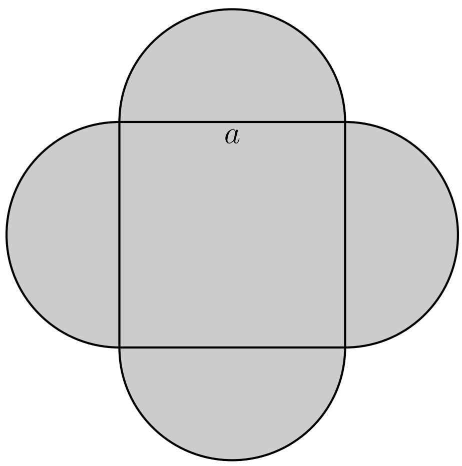
    d) Es gibt unendlich viele Zahlenpaare $(a; b)$, für die der Wert des Terms 2 ist. Zeige, dass für diese Zahlenpaare $a = 3b$ gilt.

18. a) Nathan betrachtet den Vollmond. Mit einer kleinen Kunststoffperle, die er 70 cm vor sein Auge hält, kann er den Mond genau abdecken. Nathan weiß, dass die Perle einen Durchmesser von 7 mm hat und dass der Monddurchmesser 3500 km beträgt. Berechne aus diesen Angaben, wie weit der Mond etwa von der Erdoberfläche entfernt ist. Erläutere deinen Gedankengang.

    b) In einem einfachen Modell bewegt sich der Mond mit einer konstanten Bahngeschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit dem Radius 384000 km um die Erde. Für einen Umlauf um die Erde benötigt der Mond 27 Tage. Kreuze den Zahlenterm an, mit dem sich die Bahngeschwindigkeit des Mondes in km/h berechnen lässt.

☐ $\frac{2\pi \cdot 384000}{27 \cdot 24 \cdot 3600}$	☐ $\frac{2\pi \cdot 384000}{27 \cdot 24}$	☐ $\frac{27 \cdot 24}{2\pi \cdot 192000^2}$
☐ $\frac{27 \cdot 24}{\pi \cdot 384000}$	☐ $\frac{\pi \cdot 384000^2 \cdot 24}{27}$	☐ $\frac{2\pi \cdot 192000}{27 \cdot 24}$

19. Einem Quadrat der Kantenlänge a sind vier Halbkreise aufgesetzt, vergleiche Abbildung.

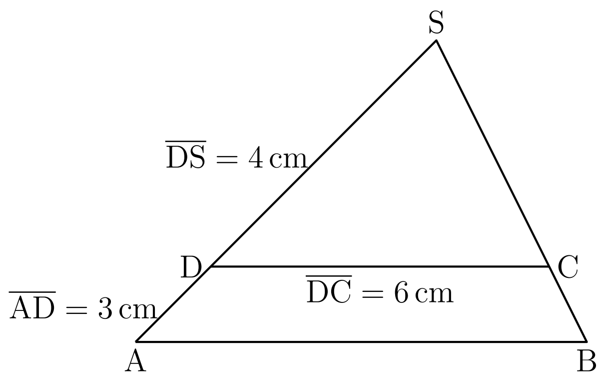


a) Zeige, dass für den Inhalt A der grau getönten Fläche (in Abhängigkeit von der Kantenlänge a) gilt: $A = a^2(1 + 0{,}5\pi)$.

b) Bestimme, um wie viel Prozent dieser Inhalt A größer als der des Quadrats (mit der Kantenlänge a) ist. Runde auf 2 Dezimalen.

c) Wie groß ist der Inhalt A, wenn $a = 70\,\text{cm}$ ist? Gib diesen Inhalt sowohl in cm^2 als auch in m^2 an, runde dabei jeweils auf 2 Dezimalen.

20. Gegeben ist ein Trapez ABCD, dessen Schenkel sich im Punkt S schneiden. In der nicht maßstabsgetreuen Skizze sind die gegebenen Streckenlängen eingetragen.



a) Wie groß ist das Verhältnis $\overline{\text{SC}} : \overline{\text{CB}}$?

☐ 4 : 7 ☐ 7 : 4 ☐ 3 : 4 ☐ 4 : 3 ☐ 4 : 6

b) Berechne die Streckenlänge $\overline{\text{AB}}$.

21. Zeichne die Geraden $g : y = 2x - 0{,}5$ und $h : y = -0{,}25x + 3{,}5$ in ein Koordinatensystem ein und bestimme (exakt) die Koordinaten ihres Schnittpunkts S. Den Schnittpunkt von g mit der y-Achse nennen wir A, den Schnittpunkt von h mit der y-Achse nennen wir B. Die drei Punkte A, S und B bilden ein Dreieck. Ergänze deine Zeichnung dementsprechend und bestimme (exakt) den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

22. In einer Kiste liegen Bälle. Jeder Ball ist entweder rot oder blau. Die Anzahl der roten Bälle bezeichnen wir mit r, die Anzahl der blauen mit b. Schreibe (mit Hilfe der Symbole r und b) zu jeder Aussage eine zugehörige Ungleichung auf.

a) In der Kiste liegen höchstens 28 Bälle.
b) Selbst wenn man noch vier rote Bälle in die Kiste legte, wären immer noch mehr blaue als rote Bälle in der Kiste.
c) Es liegen mehr als dreimal so viele blaue wie rote Bälle in der Kiste.

23. Zeige, dass die Ungleichung

$$4(3-2x)-12x-14<7x-2-3(7-6x)$$

die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\left]\frac{7}{15};\infty\right[$ besitzt und gib anschließend die Lösungsmenge der Ungleichung

$$4(3-2x)-12x-14\geq 7x-2-3(7-6x)$$

an.

24. Gegeben sind die Funktionen

$$f: x \mapsto x+\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad g: x \mapsto \frac{2}{3}x+2 \quad \text{mit } \mathbb{D}_f=\mathbb{D}_g=\mathbb{Q}.$$

a) Zeichne G_f und G_g in ein Koordinatensystem.
b) G_f, G_g und die y-Achse schließen ein Dreieck ein. Ergänze deine Zeichnung dementsprechend und gib (exakt) die Koordinaten aller drei Eckpunkte an. Bestimme (exakt) den Flächeninhalt dieses Dreiecks. Erläutere deine Überlegungen.

25. Um ein Schwimmbecken vollständig mit Wasser zu füllen, brauchen 8 Pumpen genau 3 Stunden. Udai behauptet nun, dass 6 Pumpen, wenn sie das Schwimmbecken nur zu drei Fünftel füllen, genau 2,5 Stunden brauchen. Untersuche, ob Udai Recht hat. Gib gegebenenfalls an, um wie viele Minuten die Pumpen tatsächlich schneller oder langsamer sind.

5 Für die Jahrgangsstufe 9

1. Die Terme $f(x) = 35x^2 - 31x + 6$ und $g(x) = a(x-b)(x-c)$ sind äquivalent. Bestimme a, b und c.

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_b : x \mapsto x^2 + bx - 1$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und dem Parameter $b \in \mathbb{R}$.

   a) Zeige, dass jede Funktion f_b dieser Schar genau zwei Nullstellen besitzt.

   b) Begründe, dass für jedes $b \in \mathbb{R}$ gilt: Der Graph von f_b ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $2x + b = 0$ und hat die Gerade mit der Gleichung $4y + b^2 + 4 = 0$ als Tangente.

3. In Einsteins Relativitätstheorie spielt die Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ eine wichtige Rolle.

   a) Die Definitionsmenge des Terms $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist:

   ☐ $]-\infty; \infty[$ ☐ $[0; 1]$ ☐ $]-1; 1[$ ☐ $[-1; 1]$

   b) Bestätige durch ausführliche Rechnung, dass für $x = 0{,}8$ der Funktionswert $y = 1\frac{2}{3}$ ist.

   c) Eine zentrale Aussage von Einsteins Relativitätstheorie lautet: „Die Masse m eines Körpers ist keine Konstante, sondern wächst mit zunehmender Geschwindigkeit v des Körpers.“

   Es gilt: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-x^2}}$ mit $x = \dfrac{v}{c}$.

   Dabei ist m_0 die Masse des ruhenden Körpers und c die Lichtgeschwindigkeit.
   Ergänze folgenden Satz:
   „Wenn für einen Körper $x = 0{,}8$ gilt, also seine Geschwindigkeit …% der Lichtgeschwindigkeit beträgt, dann ist seine Masse das …fache seiner Masse im ruhenden Zustand.“

4. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = x^2 - 4$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Entscheide für jede der folgenden Aussagen über den Graphen von f, ob sie wahr oder falsch ist.

	wahr	falsch
Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.	☐	☐
Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $(0\,\vert\,4)$.	☐	☐
Der Punkt $(4\,\vert\,11)$ liegt auf dem Graphen.	☐	☐
Für $x \in \,]-2; 2[$ verläuft der Graph oberhalb der x-Achse.	☐	☐
Die Gerade mit der Gleichung $y = -4$ ist Tangente an den Graphen.	☐	☐
Der Graph ist kongruent zum Graphen der Funktion $g : x \mapsto (3-x)^2 + 1$ mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$.	☐	☐
Es gibt zwei Tangenten an den Graphen, die aufeinander senkrecht stehen.	☐	☐

5. a) Auf die Frage, „Wie addiert man zwei negative Zahlen?“ antwortet Oberto „minus plus minus ist minus“. „Naja, das ist so eine Kurzform,“ sagt die Lehrerin, „aber was bedeutet das denn eigentlich?“
Formuliere eine Erklärung, die Obertos Lehrerin zufrieden stellen würde.

   b) Auf die Frage, „Was besagt der Satz des Thales?“ antwortet Odo „Der Winkel bei C ist 90 Grad“. „Naja, das ist so eine Kurzform,“ sagt die Lehrerin, „aber was bedeutet das denn eigentlich?“
Formuliere eine Erklärung, die Odos Lehrerin zufrieden stellen würde.

   c) Auf die Frage, „Was besagt der Satz des Pythagoras?“ antwortet Ogün „$a^2 + b^2 = c^2$“. „Naja, das ist so eine Kurzform,“ sagt die Lehrerin, „aber was bedeutet das denn eigentlich?“
Formuliere eine Erklärung, die Ogüns Lehrerin zufrieden stellen würde.

6. Vereinfache folgende Terme möglichst weit.

   a) $\sqrt{5^2 - 4^2}$ b) $\frac{10+\sqrt{8}}{2}$

   c) $\frac{\sqrt{c^2-1}}{\sqrt{c+1}}$ für $c > 1$ d) $\sqrt{(d+1)d - d}$ für $d < 0$

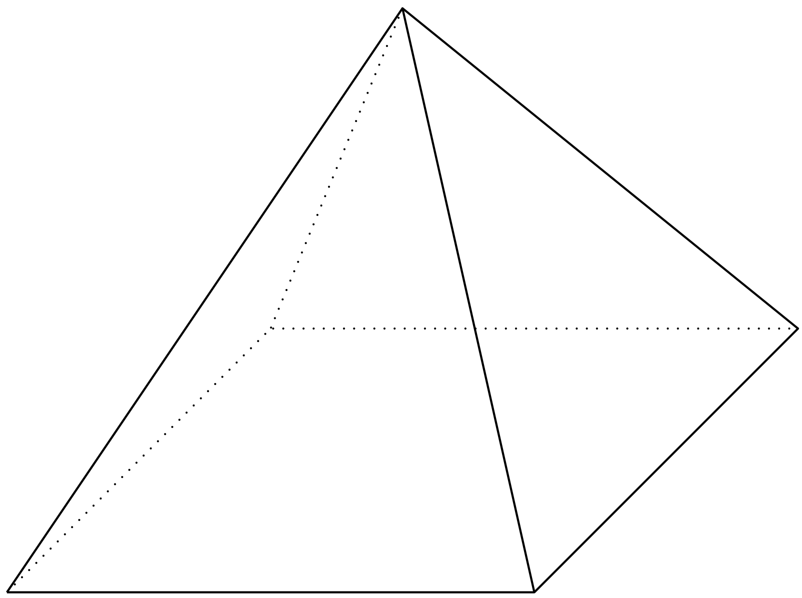
7. Ein „Rechentrick“ zum Quadrieren einer zweistelligen Zahl mit der Einerziffer 5 lautet so:

   Nimm die Zehnerziffer der Zahl und vergrößere sie um 1, multipliziere das Ergebnis mit der Zehnerziffer selbst. Hängt man an die Zahl, die sich dabei ergibt, die Ziffernfolge 25 an, hat man schon die gesuchte Quadratzahl.

a) Berechne nachvollziehbar mit dieser Methode das Quadrat der Zahl 45.

b) Eine zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer x und der Einerziffer 5 lässt sich schreiben als $10x + 5$. Berechne $(10x + 5)^2$, forme das Ergebnis geeignet um und begründe dadurch den obigen „Rechentrick“.

8. Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge g hat die Höhe h.



a) Löse die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot g^2 \cdot h$ für das Volumen der Pyramide nach der Seitenlänge g auf.

b) Wie groß ist der Winkel, den eine Seitenkante der Pyramide mit der Grundfläche einschließt, wenn die Höhe halb so lang wie die Diagonale des Grundflächenquadrats ist?

Die Pyramide wird nun von einer Ebene geschnitten, die parallel zur Grundfläche ist und von dieser den Abstand $\frac{h}{2}$ hat.

c) Zeichne die entstehende Schnittfläche in das obige Schrägbild ein.

d) Welcher Bruchteil des Inhalts der Grundfläche ist der Inhalt der Schnittfläche?

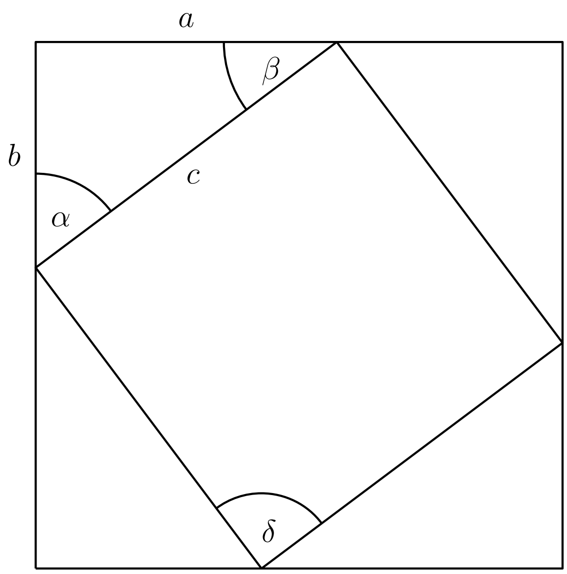
☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{3}{8}$

e) Welcher Bruchteil des Pyramidenvolumens ist das Volumen der abgeschnittenen kleinen Pyramide?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{3}{8}$

9. Die gerade Pyramide ABCDS hat das Rechteck ABCD mit $\overline{\mathrm{AB}} = 8\,\mathrm{cm}$ und $\overline{\mathrm{AD}} = 6\,\mathrm{cm}$ als Grundfläche. Die Kante [AS] ist 13 cm lang. Bestimme das Volumen der Pyramide.

10. Gegeben sind vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c. Damit wird eine Figur so gezeichnet, dass ein Quadrat mit der Seitenlänge $a + b$ entsteht, vergleiche Abbildung.



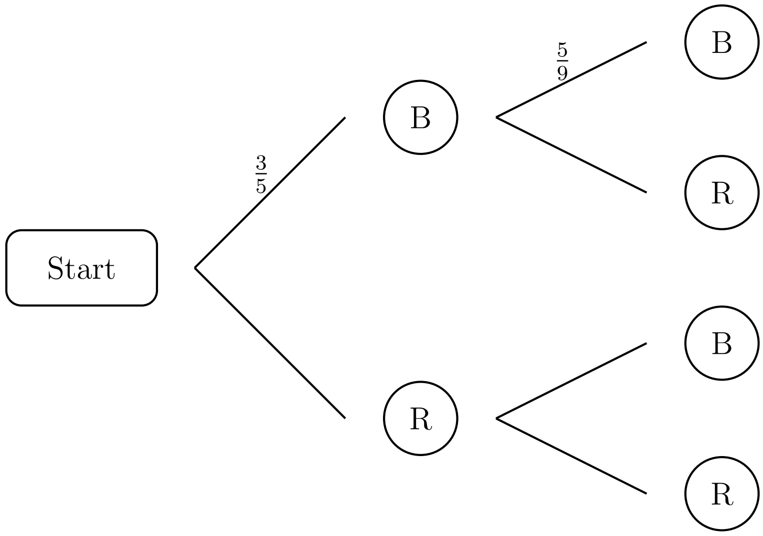
a) Warum ergeben die den Katheten gegenüberliegenden Winkel α und β zusammen 90° ?

b) Das innere Viereck hat vier gleich lange Seiten. Begründe, dass es ein Quadrat ist, indem du durch eine Winkelbetrachtung nachweist: $\delta = 90°$.

c) Berechne den Flächeninhalt des äußeren Quadrats auf zwei verschiedene Arten und folgere daraus den Satz des Pythagoras.

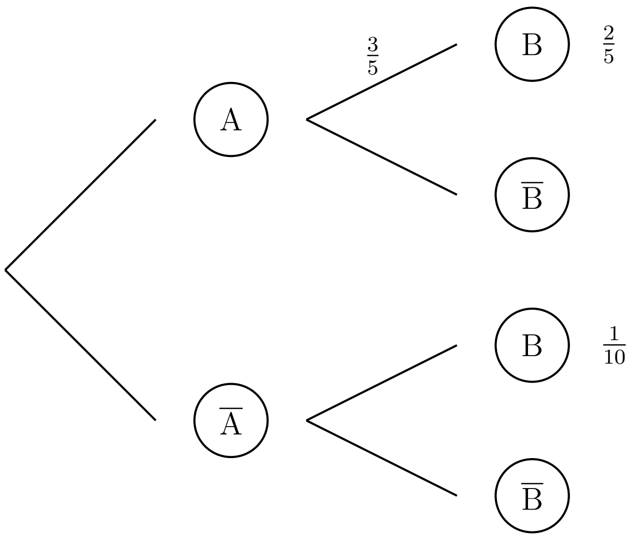
11. Weise nach, dass das Viereck ABCD mit A(0 | 0), B(1 | 3), C(−3,5 | 4,5) und D(−4,5 | 1,5) ein Rechteck ist und berechne seinen Flächeninhalt.

12. Aus einer Urne mit 4 roten und 6 blauen Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln gezogen. Zu diesem Zufallsexperiment gehört das nachstehende (nicht vollständig ausgefüllte) Baumdiagramm.



Begründe anhand des Baumdiagramms, warum bei diesem Zufallsexperiment ohne Zurücklegen gezogen wird, vervollständige das Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen werden.

13. Das Baumdiagramm gehört zu einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B.



a) Berechne $P(\overline{\text{B}})$.

b) Weise nach, dass $P(\text{A} \cap \text{B}) \neq P(\text{A}) \cdot P(\text{B})$ gilt.

c) Von den im Baumdiagramm angegebenen Zahlenwerten soll nur der Wert $\frac{1}{10}$ so geändert werden, dass $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \cdot P(\text{B})$ gilt. Bestimme den geänderten Wert.

14. Gib jeweils den Term einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

    a) Die Funktion a hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und den Wertebereich $[-5; \infty[$.

    b) Der Definitionsbereich der Funktion b ist $\mathbb{R}$, ihr Graph ist streng monoton steigend und enthält den Punkt $(3 \,|\, -2)$.

    c) Der Graph der Funktion c enthält den Punkt $(0 \,|\, -4)$ und hat (genau) die zwei Asymptoten $x = 3$ und $y = -2$.

    d) Der Definitionsbereich der Funktion d ist $\mathbb{R}$, ihr Graph enthält die Punkte $(-2 \,|\, 0)$, $(3 \,|\, 0)$ und $(0 \,|\, 5)$.

    e) Die Funktion e hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}$, ihr Graph ist symmetrisch zu $x = 5$ und hat die Gerade $y = 3$ als Tangente.

    f) Die Funktion f hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}$, ihr Graph ist punktsymmetrisch zu $(1 \,|\, 1)$ und enthält den Punkt $(3 \,|\, 5)$.

    g) Die Funktion g hat den maximalen Definitionsbereich $]-\infty; 5]$.

15. a) Löse: $6x^2 + 7x - 5 = 0$.

    b) Löse, ohne die Lösungsformel für quadratische Gleichungen zu verwenden: $(2x - 3)^2 = 6$

16. Der Graph einer quadratischen Funktion f hat den Scheitel $\text{S}(-1 | \, 2)$ und geht durch den Punkt $\text{P}(2 \,|\, 5)$. Bestimme eine Gleichung des Funktionsterms $f(x)$. Erläutere deine Vorgehensweise.

17. Pascal und Pinkus spielen. Ihr Spiel besteht darin, aus einer Urne, in der genau drei blaue und genau eine rote Kugel liegen, abwechselnd je eine Kugel (ohne sie zurückzulegen) zu ziehen. Sieger ist, wer unter seinen zwei gezogenen Kugeln die rote Kugel hat. Bestimme, mit welcher Wahrscheinlichkeit Pascal, der als Erster eine Kugel zieht, bei diesem Spiel gewinnt.

18. Vereinfache (möglichst weit):

$$\frac{12a + 12 + 3a^2}{21a + 42} + \frac{36a^2 - 25}{42a - 35}$$

19. Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat das Volumen 288. Die Höhe der Pyramide ist genau so lang wie die Diagonale der Grundfläche. Bestimme, wie lang eine Seite der Grundfläche ist.

20. In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Seite 3 cm, eine andere Seite $\sqrt{13}$ cm lang. Erläutere, warum damit das Dreieck noch nicht eindeutig festgelegt ist. Bestimme alle möglichen Längen für die dritte Seite.

21. Zeige, dass die Terme $a(x) = \frac{20x}{x^2-25}$ und $b(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5}$ äquivalent sind (über $\mathbb{R} \setminus \{\pm 5\}$).

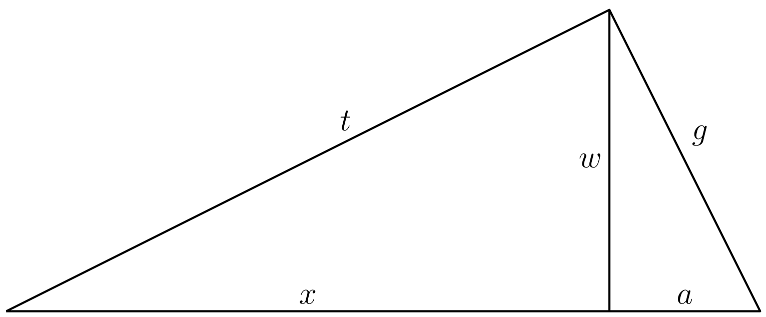
22. Die Gerade $g : y = 2x + 3$ und die Parabel $p : y = x^2 + x + 1$ schneiden sich in den Punkten A und B. Bestimme (rechnerisch, exakt) den Abstand von A und B. Überprüfe deine Rechnung durch eine (maßstabsgetreue) Zeichnung.

23. In Urne A befinden sich zwei rote und drei weië Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln. Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment: Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

    a) Gib alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an.

    b) Betrachtet wird das Ereignis E: „Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.“ Untersuche, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

24. Die Abbildung zeigt ein großes rechtwinkliges Dreieck, das durch die Höhe in zwei (kleinere) rechtwinklige Teildreiecke zerlegt wird. Die rechten Winkel sind nicht eingezeichnet. Fünf Strecken(-längen) sind benannt.



Zwischen diesen benannten Streckenlängen gibt es Beziehungen, die sich in Form von (insgesamt) sieben Gleichungen anschreiben lassen.

Eine Gleichung ist zum Beispiel: $(x+a)^2 = g^2 + t^2$.

Gib die übrigen sechs Gleichungen an.

25. Erläutere (anhand einer aussagekräftigen Skizze), was die Gleichung $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ in einem gleichseitigen Dreieck aussagt. Berechne dann (in Teilschritten) den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe 18.

26. In einem gleichseitigen Dreieck beträgt die Differenz zwischen der Länge einer Seite und der Länge einer Höhe genau 1. Bestimme (exakt) den Umfang des Dreiecks.

27. In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Hypotenusenabschnitt 4-mal so lang wie der andere. Die Höhe (auf die Hypotenuse) hat die Länge 1,5. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks.

28. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die längere Kathete um 49 cm kürzer als die Hypotenuse, aber um 151 cm länger als die kürzere Kathete. Zeige, dass diese Angaben das Dreieck eindeutig festlegen und berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

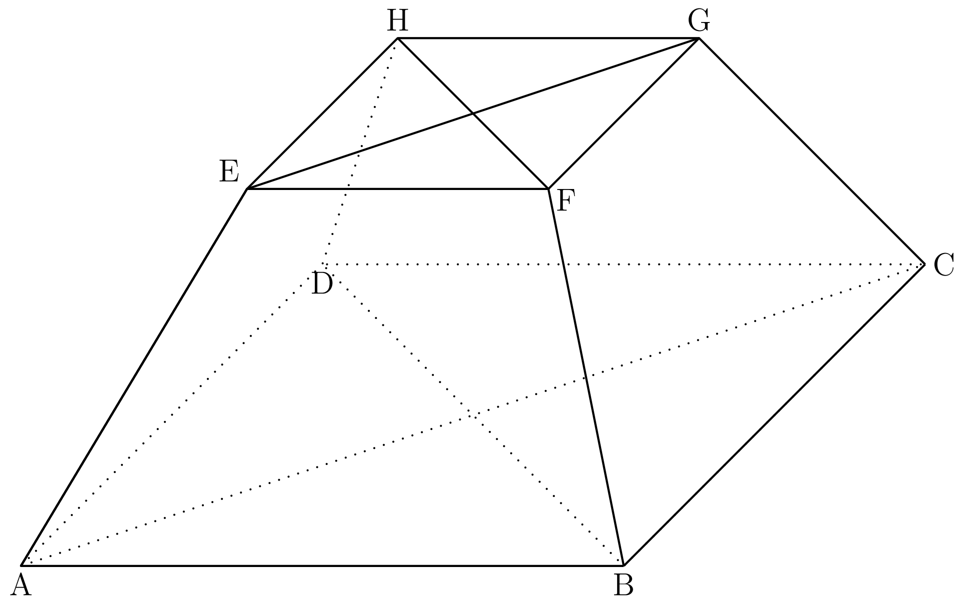
29. Die Punkte A$(700\,|\,502)$ und B$(-14\,|\,-8)$ liegen auf der Geraden g.

    a) Bestimme eine Gleichung für g.
    b) Berechne, welchen Abstand A von B hat.
    c) Untersuche, ob der Punkt C$(342\,|\,247)$ auf oder oberhalb oder unterhalb von g liegt.

30. a) Erläutere anhand einer aussagekräftigen Skizze, was man unter einem Trapez, insbesondere unter einem achsensymmetrischen Trapez versteht.

b) In einem achsensymmetrischen Trapez mit dem Flächeninhalt $27\,\mathrm{cm}^2$ ist die Höhe doppelt so lang wie die kürzere der beiden Grundseiten und die längere der beiden Grundseiten ist genau so lang wie die Höhe. Berechne die Länge der Diagonalen, also den Abstand zweier gegenüberliegender Eckpunkte.

31. Eine regelmäßige Pyramide ABCDS wird parallel zur quadratischen Grundfläche ABCD in zwei Teilkörper geschnitten. Einer dieser beiden Teilkörper ist der Pyramidenstumpf ABCDEFGH mit quadratischer Deckfläche EFGH und $\overline{\mathrm{AB}} = 7\,\mathrm{cm}$ und $\overline{\mathrm{EF}} = 4\,\mathrm{cm}$ und $\overline{\mathrm{AE}} = 5\,\mathrm{cm}$, vgl. (nicht maßstabsgetreue) Abbildung.



a) Berechne (auf 0,01° genau) den Winkel α, den die Diagonale [AC] und die Kante [AE] einschließen.

b) Gib an, was sich aus der Angabe „regelmäßig" über die Lage von S bezüglich der Grundfläche ABCD aussagen lässt und bestimme (exakt) den Abstand von S zur Grundfläche ABCD.

c) Bestimme (exakt) das Volumen des Pyramidenstumpfs ABCDEFGH.

32. Gib den Wert für $\cos 30°$ an und verwende die für alle Winkel $0° \leq \alpha \leq 45°$ gültige Beziehung $2 \cdot (\cos\alpha)^2 = 1 - \cos(2\alpha)$, um einen exakten Wert für $\cos 15°$ anzugeben. Dein Wert muss nicht vereinfacht sein.

33. In einer Urne liegen 4 blaue und 6 rote Kugeln. Victor zieht nacheinander, ohne Zurücklegen 5 Kugeln. Bestimme, mit welcher Wahrscheinlichkeit nicht alle dieser 5 gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben. Exaktes Ergebnis.

34. Wera und Walburga haben je drei Steine. Sie werfen abwechselnd auf eine Blechdose. Ihre Treffsicherheiten betragen 0,2 bzw. 0,25. Wera beginnt. Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass (i) Wera und (ii) Walburga als erste trifft.

35. Gib jeweils den Term an und berechne seinen Wert.

    a) Der Term ist eine Quadratwurzel, dessen Radikand die Differenz des Quotienten der Zahlen 1017 und 3 und der Summe der Zahlen -4 und 12 ist.

    b) Der Term ist ein Quotient, dessen Dividend die Quadratwurzel von der Summe der Zahlen 5 und 11 und dessen Divisor die Summe der Quadratwurzel von 144 und der Differenz aus 25 und 9 ist.

36. a) Untersuche, ob es eine positive reelle Zahl gibt, die um 1 größer als ihr Quadrat ist.

    b) Bestimme eine positive reelle Zahl, die um 1 kleiner als ihr Quadrat ist.

    c) Wie viele reelle Zahlen gibt es, die um 1 größer als ihr Kehrwert sind? Begründe deine Antwort.

    d) Untersuche, ob sich die Zahl $4\frac{1}{60}$ so in zwei Summanden zerlegen lässt, dass der eine Summand gleich dem Kehrwert des anderen ist. Bestimme gegebenenfalls zwei derartige Summanden und ihren Produktwert.

37. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die längere Kathete um 1 cm kürzer als die Hypotenuse, aber um 7 cm länger als die kürzere Kathete. Bestimme alle Seitenlängen.

38. Bestimme jeweils die Lösungsmenge (über der jeweils maximalen Grundmenge).

    a) $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} = 2$

    b) $\frac{x}{1+x} = \frac{4-x}{1-x^2}$

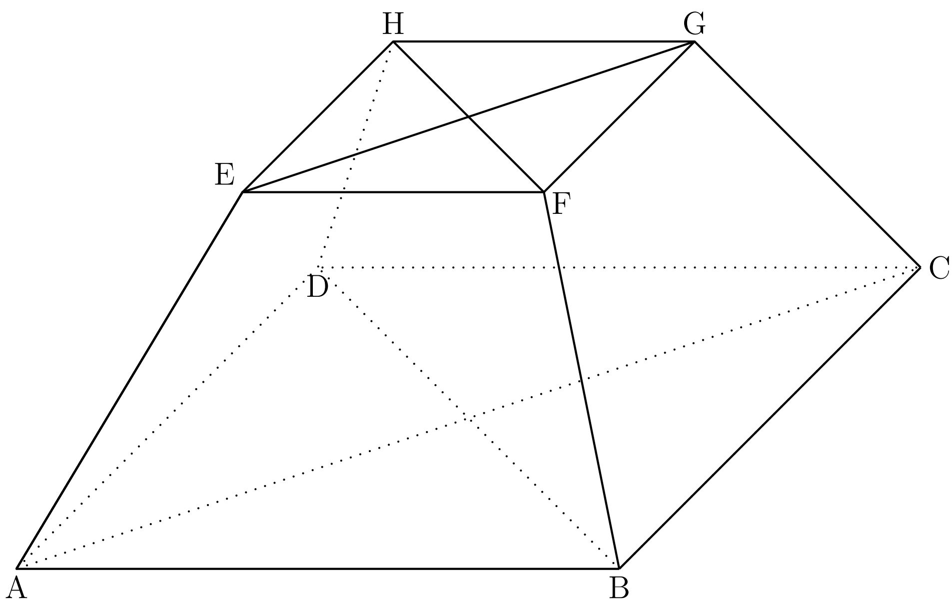
    c) $\frac{6}{3x-1} = 1 + \frac{8}{3+x}$

39. Bestimme (exakt) die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g. Überprüfe deine Rechnung durch eine Zeichnung.

    a) $f : x \mapsto 2x - 6$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g : x \mapsto \frac{4}{x+3} - 5$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
    b) $f : x \mapsto 2x + 1$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g : x \mapsto \frac{20}{x} - 5$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
    c) $f : x \mapsto 4x - 3$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g : x \mapsto \frac{8}{x-7} - 6$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{7\}$
    d) $f : x \mapsto 4x + 1$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g : x \mapsto \frac{6}{x-1} + 10$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
    e) $f : x \mapsto 3x^2 + 8x - 2$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g : x \mapsto x^2 + x + 2$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$
    f) $f : x \mapsto 30x^2 + 14x - 4$ und $g : x \mapsto -5x^2 + 5x - 2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$
    g) $f : x \mapsto 6x^2 - 7x + 3$ und $g : x \mapsto -2x + 2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$

40. In einem rechtwinkligen Dreieck mit dem Flächeninhalt 43 ist eine Kathete 8-mal so lang wie die andere. Bestimme die Länge der Hypotenuse.

41. Gegeben ist der regelmäßige Pyramidenstumpf ABCDEFGH mit quadratischer Grundfläche ABCD und quadratischer Deckfläche EFGH und $\overline{\mathrm{AB}} = 4\,\mathrm{cm}$ und $\overline{\mathrm{EF}} = 3\,\mathrm{cm}$ und $\overline{\mathrm{AE}} = 2{,}5\,\mathrm{cm}$, vgl. die nicht maßstabsgetreue Abbildung.



Bestimme (auf 0,01° genau) die Größe des Winkels, den die Diagonale [AC] und die Kante [AE] einschließen. Erläutere deinen Gedankengang.

6 Für die Jahrgangsstufe 10

1. Die ganzrationale Funktion f vom Grad 5 hat die einfache Nullstelle $x = -3$ und die zweifachen Nullstellen $x = 1$ und $x = 4$. Weiter gilt $f(0) = 3$. Bestimme $f(x)$. Erläutere deine Überlegungen. Skizziere den Graphen.

2. Der Graph der Funktion $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+1}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ wird um -3 längs der x-Achse und um 4 längs der y-Achse verschoben. Es entsteht der Graph der Funktion g. Gib $g(x)$ an, erläutere deine Überlegungen.

3. In einer Klasse sind 12 Mädchen und 8 Buben. Ein Drittel der Buben dieser Klasse spielt Fußball. Die Anzahl der Mädchen (dieser Klasse), die nicht Fußball spielen, ist dreimal so groß wie die Anzahl der Mädchen (dieser Klasse), die Fußball spielen.

   a) Erstelle eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel.

   b) Bestimme, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes, Fußball spielendes Mitglied dieser Klasse ein Mädchen ist.

4. Polly behauptet, eine Lösung der Gleichung $8 + \sin(3x) = 4\cos(2x)$ gefunden zu haben. Begründe, warum Polly auf keinen Fall Recht haben kann.

5. Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a,c} : x \mapsto \sin(ax) + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}_0^+$. Gib für jede der beiden folgenden Eigenschaften einen möglichen Wert für a und einen möglichen Wert für c so an, dass die zugehörige Funktion $f_{a,c}$ diese Eigenschaft besitzt.

   α) Die Funktion $f_{a,c}$ hat die Wertemenge $[0; 2]$.

   β) Die Funktion $f_{a,c}$ hat im Intervall $[0; \pi]$ genau drei Nullstellen.

6. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 2^{-x} \cdot (3x + x^2)$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

   a) Bestimme die Nullstellen von f.

   b) Zeige, dass der Graph von f weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

   c) Gib das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und eine Gleichung der Asymptote des Graphen von f an.

7. Gib jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten periodischen Funktion an, die die angegebene Eigenschaft besitzt.

a) Der Graph der Funktion f geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \sin x$ durch Spiegelung an der x-Achse hervor.

b) Der Graph der Funktion g geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \sin x$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor.

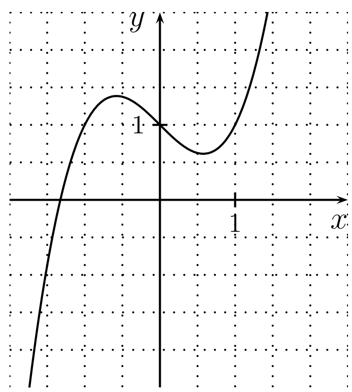
c) Die Funktion h hat den Wertebereich $[-2; 4]$.

d) Die Funktion i besitzt die Periode π.

e) Die Funktion j besitzt keine Nullstellen.

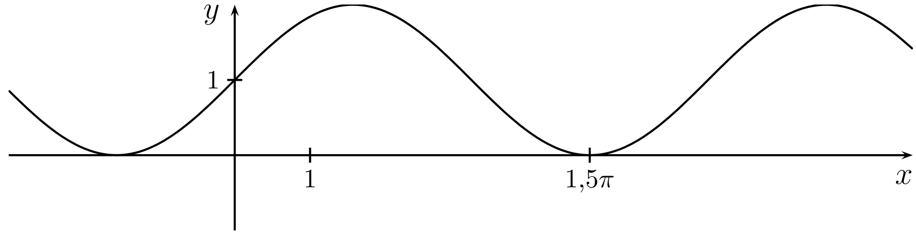
8. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto (8 - x^3) \cdot (25 + \log_5 x)$ mit maximalem Definitionsbereich $\mathbb{D}$.
   Gib $\mathbb{D}$ an und bestimme die Nullstellen von f.

9. Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$. Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen.



   Gib an, um welche Funktion es sich handelt. Begründe, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.

10. Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h mit $f(x) = 1 + \sin x$, $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ und $h(x) = 1 + \sin(2x)$. Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen.

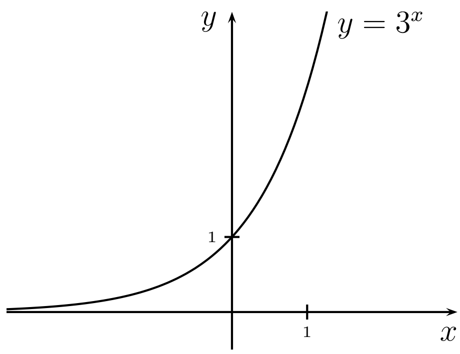


Gib an, um welche Funktion es sich handelt. Begründe, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.

11. Die Funktion f hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und den Wertebereich $[-2; 4]$; sie ist periodisch mit Periodenlänge π und ihr Graph enthält den Punkt $(0\,|\,1)$. Gib einen möglichen Funktionsterm $f(x)$ an; erläutere deine Überlegungen. Zeichne einen möglichen Graphen im Bereich $-\pi \leq x \leq 2\pi$.

12. Gegeben ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = a \cdot 3^x + b$. Bestimme a und b so, dass die Punkte $(1\,|\,34)$ und $(2\,|\,106)$ auf dem Graphen von f liegen.

13. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 3^x$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



   a) Quirine verschiebt G_f zuerst um 2 längs der x-Achse, anschließend noch um -3 längs der y-Achse. Es entsteht der Graph der Funktion g. Gib $g(x)$ an.
   b) Quendrime spiegelt G_f zuerst an der Geraden $y = x$, anschließend verschiebt sie ihn noch um 2 längs der y-Achse. Es entsteht der Graph der Funktion h. Gib $h(x)$ an.
   c) Quendresa spiegelt G_f an der Geraden $y = 1$. Es entsteht der Graph der Funktion i. Gib $i(x)$ an.
   d) Quida spiegelt G_f an der Geraden $x = 1$. Es entsteht der Graph der Funktion j. Gib $j(x)$ an.

14. Ein Moderator lädt zu seiner Talkshow drei Politiker, eine Journalistin und zwei Mitglieder einer Bürgerinitiative ein. Für die Diskussionsrunde ist eine halbkreisförmige Sitzordnung vorgesehen, bei der nach den Personen unterschieden wird und der Moderator den mittleren Platz einnimmt.

a) Gib einen Term an, mit dem die Anzahl der möglichen Sitzordnungen berechnet werden kann, wenn keine weiteren Einschränkungen berücksichtigt werden.

b) Der Sender hat festgelegt, dass unmittelbar neben dem Moderator auf einer Seite die Journalistin und auf der anderen Seite einer der Politiker sitzen soll. Berechne unter Berücksichtigung dieser weiteren Einschränkung die Anzahl der möglichen Sitzordnungen.

15. Gib den Term einer Funktion f an, die in $x = 2$ eine Nullstelle und in $x = 3$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat und deren Graph die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ als Asymptote hat.

16. Gegeben sind die Funktionen

$$f : x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \quad \text{und} \quad g : x \mapsto 3\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) - 0{,}2$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$. Ihre Graphen werden mit G_f und G_g bezeichnet.

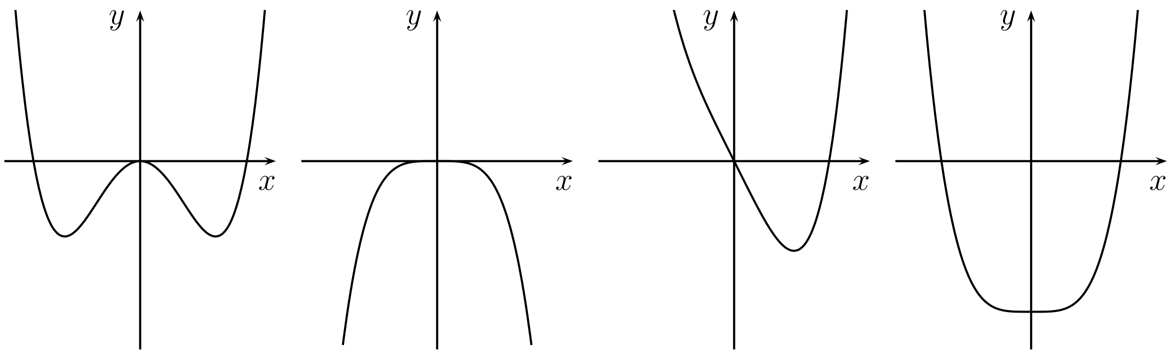
a) Zeige, dass $f(x)$ zu jedem der drei folgenden Terme äquivalent ist: $\frac{2}{(x+1)(x+3)}$; $\frac{2}{x^2+4x+3}$; $\frac{1}{0{,}5(x+2)^2-0{,}5}$

b) Begründe, dass die x-Achse horizontale Asymptote von G_f ist, und gib die Gleichungen der vertikalen Asymptoten von G_f an. Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse.

c) Beschreibe, wie G_g aus G_f hervorgeht.

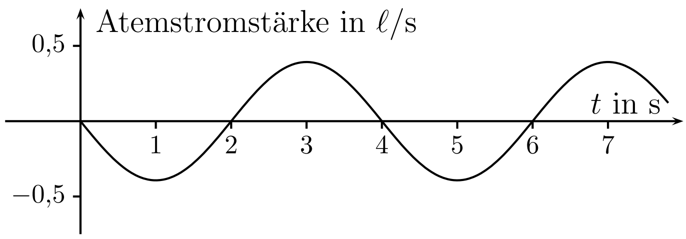
17. Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_n : x \mapsto x^4 - 2x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sowie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_0 : x \mapsto x^4 - 2$.

a) Die Abbildungen 1 bis 4 zeigen die Graphen der Funktionen f_0, f_1, f_2 bzw. f_4. Ordne jeder dieser Funktionen den passenden Graphen zu und begründe drei deiner Zuordnungen durch Aussagen zur Symmetrie, zu den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen oder dem Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs des jeweiligen Graphen.



b) Betrachtet werden nun die Funktionen f_n mit $n > 4$. Gib in Abhängigkeit von n das Verhalten dieser Funktionen für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$ an.

18. In der Lungenfunktionsdiagnostik spielt der Begriff der Atemstromstärke eine wichtige Rolle. Im Folgenden wird die Atemstromstärke als die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge betrachtet, d. h. insbesondere, dass der Wert der Atemstromstärke beim Einatmen positiv ist. Für eine ruhende Testperson mit normalem Atemrhythmus



wird die Atemstromstärke in Abhängigkeit von der Zeit modellhaft durch die Funktion $f : x \mapsto -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $f(t)$ die Atemstromstärke in Litern pro Sekunde. Die Abbildung zeigt den durch die Funktion f beschriebenen zeitlichen Verlauf der Atemstromstärke.

a) Berechne $f(1{,}5)$ und interpretiere das Vorzeichen dieses Werts im Sachzusammenhang.

b) Beim Atmen ändert sich das Luftvolumen in der Lunge. Gib auf der Grundlage des Modells einen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge der Testperson minimal ist, und mache deine Antwort mit Hilfe der Abbildung plausibel.

Die Testperson benötigt für einen vollständigen Atemzyklus 4 Sekunden. Die Anzahl der Atemzyklen pro Minute wird als Atemfrequenz bezeichnet.

c) Gib zunächst die Atemfrequenz der Testperson an.
Die Atemstromstärke eines jüngeren Menschen, dessen Atemfrequenz um 20% höher ist als die der bisher betrachteten Testperson, soll durch eine Sinusfunktion der Form $g : t \mapsto a\sin(bt)$ mit $t \geq 0$ und $b \geq 0$ beschrieben werden. Ermittle den Wert von b.

19. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 2 - \sqrt{12 - 2x}$ mit maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_f =]-\infty; 6]$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet und ist streng monoton steigend.

a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. Bestimme das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und gib $f(6)$ an. Gib den Wertebereich von f an.

b) Gib $f(-2)$ an und zeichne G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf die folgenden Aufgaben: $-3 \leq y \leq 7$).

c) Die Funktion f ist in $\mathbb{D}_f$ umkehrbar. Gib die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1} von f an und zeige, dass $f^{-1}(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 4$ gilt.

Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h : x \mapsto -0{,}5x^2 + 2x + 4$ ist die Parabel G_h. Der Graph der in Teilaufgabe c) betrachteten Umkehrfunktion f^{-1} ist ein Teil dieser Parabel.

d) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von G_h mit der durch die Gleichung $y = x$ gegebenen Winkelhalbierenden w des I. und III. Quadranten.

e) Zeichne die Parabel G_h unter Berücksichtigung des Scheitels im Bereich $-2 \leq x \leq 4$ in das bereits vorhandene Koordinatensystem ein. Spiegelt man diesen Teil von G_h an der Winkelhalbierenden w, so entsteht eine herzförmige Figur; ergänze deine Zeichnung dementsprechend.

f) Schätze den Inhalt des von G_h und w eingeschlossenen Flächenstücks.

20. Eine Bakterienkultur mit anfangs 30 000 Bakterien wird so angelegt, dass sich die Anzahl der vorhandenen Bakterien alle fünf Stunden verdoppelt.

a) Bestimme den Term, der die Anzahl N der Bakterien in Abhängigkeit von der Anzahl x der seit dem Anlegen der Kultur vergangenen Stunden beschreibt.

Zur Kontrolle: $N(x) = 30\,000 \cdot (\sqrt[5]{2})^x$.

b) Berechne, wie viele Bakterien drei Stunden nach dem Anlegen zu erwarten sind.

c) Berechne, wie lange gewartet werden muss, bis etwa 120 000 Bakterien vorhanden sind.

21. In einer Urne liegen 2 rote, 3 gelbe und 4 blaue Kugeln.

a) Yehuda zieht aus dieser Urne 5-mal je eine Kugel ohne Zurücklegen. Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit die 5. Kugel rot ist.

b) Yusuf zieht (aus der gegebenen Urne) 4-mal je eine Kugel ohne Zurücklegen. Weil ihm dabei aus Versehen die zweite Kugel zu Boden fällt, sieht er, dass sie rot ist. Bestimme - unter dieser Bedingung - mit welcher Wahrscheinlichkeit auch die 4. Kugel rot ist.

c) Yvon zieht (ebenfalls aus der ursprünglich gegebenen Urne) 3-mal je eine Kugel ohne Zurücklegen. Bestimme, mit welcher Wahrscheinlichkeit alle von ihm gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben.